De la Biblioteca de Babel a los números normales

Javier Fresán*

Para José Luis García Martín,
que sabe lo imposible de Babel.

El universo (que otros llaman la Biblioteca) se compone de un número indefinido, y tal vez infinito, de galerías hexagonales, con vastos pozos de ventilación en el medio, cercados por barandas bajísimas. Si alguna imagen destaca por encima de las otras en la memoria de los hombres que imaginaron una biblioteca, es la de este mundo onírico, inspirado en la arquitectura de las *Carcieri d'invenzione* de Gimbattista Piranesi, con el que Borges da comienzo a uno de sus cuentos más famosos. Otros habían pensado antes que él la biblioteca como una patria silenciosa, ajena a los ritos de la sangre, como un refugio donde escuchar palabras de otro tiempo, o acaso como el ángulo desde el que comprender la realidad, para luego transformarla. Pero fue el escritor argentino, igual que un creador de luz y de tinieblas, quien supo encontrar las metáforas precisas para darle un rostro definitivo.

Borges nunca tomó lecciones de matemáticas, pero su afán enciclopédico le condujo a rodearse de textos que hablaban de los tipos de infinito o de la geometría del espacio. En el prólogo a *Matemáticas e imaginación*, que editó en su Biblioteca Personal, dice que las matemáticas, como la música, pueden prescindir del universo. Y en el "Otro poema de los dones", da gracias "por el álgebra, palacio de preciosos cristales". Desde esta perspectiva se enfrenta Borges a las matemáticas: haciendo prevalecer siempre su lado estético o filosófico sobre los tecnicismos y las minucias académicas. De niño, bajo la sombra acogedora de la biblioteca familiar, su padre le inventaba ficciones sobre la doctrina del obispo Berkeley o una enésima variación de la paradoja de Aquiles y la tortuga, para acercarlo a la música del pensamiento. Muchos años después, sería él mismo, en sus propias *Ficciones*, quien echase mano de toda su cultura matemática para entregar a los demás los últimos rincones de su Biblioteca.

Ars combinatoria

Sólo dos axiomas necesita Borges para construir la Biblioteca de Babel: su existencia *ab aeterno*, de la que se deduce también la eternidad del mundo; y el postulado que cifra en veinticinco el número de símbolos con los que se escribió cada volumen. Veintidós letras, espacios en blanco, puntos y comas, que se distribuyen casi siempre de manera caótica e informe. Un bibliotecario encontró una vez un libro en el que las letras MCV se repetían desde la primera

* Autor del libro *Gödel: la lógica de los escépticos*

línea hasta la última, y son muchos los textos en los que hay que desechar cientos de páginas absurdas para leer un verso memorable. Durante siglos, los habitantes de la Biblioteca aventuraron hipótesis variadas sobre sus arcanos: hubo quien imaginó lenguas perdidas o remotas, y quien conjeturó mensajes criptográficos, en un código tal vez indescifrable. Los más audaces propusieron un sistema basado en las cadenas de Markov[1], en el que el significado de cada palabra dependía esencialmente de las anteriores. Y otros compararon "la supersticiosa y vana costumbre de buscar sentido en los libros" con la de interpretar los sueños o leer las líneas de la mano. Pero se equivocaban.

Al fin, un bibliotecario intrépido, guiado por un libro que contenía algunas nociones de análisis combinatorio, descubrió el principio que rige los vastos anaqueles: la Biblioteca contiene todas las combinaciones posibles de los veinticinco símbolos, y no hay en ella dos volúmenes iguales. De esas premisas dedujo que la Biblioteca es total, que sus libros agotan todo lo que puede expresarse en todos los idiomas:

> "Todo: la historia minuciosa del porvenir, las autobiografías de los arcángeles, el catálogo fiel de la biblioteca, miles y miles de catálogos falsos, la demostración de la falacia de esos catálogos, la demostración de la falacia del catálogo verdadero, el evangelio gnóstico de Basílides, el comentario de ese evangelio, el comentario del comentario de ese evangelio, la relación verídica de tu muerte, la versión de cada libro a todas las lenguas, las interpolaciones de cada libro en todos los libros, el tratado que Beda pudo escribir (y no escribió) sobre la mitología de los sajones, los libros perdidos de Tácito" (pág. 467).

No se dejaron esperar las consecuencias del descubrimiento. Al principio, los bibliotecarios se sintieron muy felices: conscientes de poseer un tesoro, evitaron desde entonces mostrar y compartir sus libros; preferían guardárselos para su sola contemplación, de la que tal vez obtuvieran respuestas a los misterios de la humanidad, al origen de la Biblioteca y del tiempo. Sin embargo, es difícil resistir la tentación de hablar sobre las maravillas que uno esconde, y pronto un grupo de bibliotecarios, reunido con carácter de urgencia, llegó a una conclusión desoladora: la verdad y la falsedad, los libros y sus negaciones comparten espacio en la Biblioteca. Es inútil buscar la vindicación de los actos de un hombre, porque en otro corredor también está esperando el libro que refuta su vida entera. A cualquier texto que anuncie el porvenir le acompaña la sombra del libro que lo niega, del que prevé nuestra muerte antes de que cualquier predicción pueda cumplirse. Es inútil hablar, porque todo lo que se diga ya fue dicho siglos antes. *Nihil novum*: "hablar es incurrir en tautologías".

Sin embargo, hay una puerta abierta a la *incompletitud* de la Biblioteca. "En algún anaquel de algún hexágono debe existir un libro que sea la cifra y el compendio perfecto *de todos los demás*", porque basta que un libro sea posible para que exista. Al referirse a un libro total, a un libro de todos los libros, cuya lectura convertiría al afortunado bibliotecario en un "análo-

---

1. Las *cadenas de Markov*, que toman su nombre del matemático ruso Andrei Markov, que las introdujo en un artículo publicado en 1907, son sucesiones de eventos en las que la probabilidad de que ocurra cada uno depende del suceso anterior. Esta dependencia las distingue de otros fenómenos aleatorios, como lanzar una moneda al aire repetidamente.

go de Dios", Borges está incurriendo en un delito de magnificación. Hasta ese momento, todos los libros podrían colocarse en fila, y, en rigor, la Biblioteca sería equivalente a un solo volumen, a un libro de arena formado por un número infinito de hojas infinitamente delgadas. Pero al dar cabida a los libros que son compendio y suma de todos los demás, Borges niega la totalidad de su Biblioteca, porque en cualquier estado de la misma, se puede concebir un libro nuevo: el que los contiene a todos. Y este proceso nunca tiene fin[2].

El catálogo de todos los catálogos

La población de la Biblioteca se ha ido diezmando con el tiempo. Antes, nos dice Borges, por cada tres hexágonos vivía un hombre, pero "el suicidio y las enfermedades pulmonares han destruido esta proporción". Sin embargo, aún quedan viajeros en el tiempo, descifradores ambulantes de guarismos, que peregrinaron durante su juventud en busca de un libro. Y entre ellos, recorta Borges la figura de un bibliotecario que ha pasado su vida persiguiendo el catálogo de todos los catálogos. Con este personaje, el autor del *Aleph* establece una analogía con la paradoja de Russell, tal vez la más famosa de las llamadas 'autorreferenciales', pues surgen de considerar mundos tan vastos que se incluyen a sí mismos, como el Aleph: "vi la circulación de mi oscura sangre, vi el engranaje del amor y la modificación de la muerte, vi el Aleph, desde todos los puntos, vi en el Aleph la tierra, y en la tierra otra vez el Aleph y en el Aleph la tierra, vi mi cara y mis vísceras, vi tu cara, y sentí vértigo y lloré" (pág. 625).

Hablando en términos muy generales, las paradojas son afirmaciones contradictorias, de las que la tradición literaria y filosófica nos brinda ejemplos abundantes. Quevedo, en la línea del "Pace non trovo e non ho da far guerra" de Petrarca, trata de definir el amor en un precioso soneto que comienza con la estrofa: "Es hielo abrasador, es fuego helado/ es herida que duele y no se siente/ es un soñado bien, un mal presente/ es un breve descanso muy cansado". Y Zenón de Elea quiso mostrar que no existe el movimiento con la paradoja de Aquiles y la tortuga[3], de la que también se ocupó Borges en dos textos de su libro *Discusión* ("La perpetua carrera de Aquiles y la Tortuga" y "Avatares de la

---

2. Parece que a Borges le inquietaba la posibilidad de que todas las combinaciones de los símbolos del alfabeto agotaran algún día la literatura, pues diez años después de terminar "La Biblioteca de Babel", escribe en "Nota sobre (hacia) Bernard Shaw", de *Otras inquisiciones*: "Quienes practican ese juego [combinatorio] olvidan que un libro es más que una estructura verbal, o que una serie de estructuras verbales; es el diálogo que entabla con su lector y la entonación que impone a su voz y las cambiantes y durables imágenes que deja en su memoria. [...] La literatura no es agotable, por la suficiente y simple razón de que un solo libro no lo es" (pág. 747).

3. La ventaja que Aquiles deja a la tortuga —explica Zenón— supone una brecha insalvable, pues, cuando el atleta haya corrido hasta la posición inicial de la tortuga, ésta ya se habrá desplazado un poco; y del espacio que los separe entonces, quedará siempre una fracción, por mínima que sea, que impide la victoria del de los pies ligeros. En otra formulación equivalente, se afirma que "un corredor no puede alcanzar nunca la meta, porque cuando haya recorrido la primera mitad, tendrá que correr la otra mitad; cuando haya recorrido la mitad de ésta, le quedará todavía la cuarta parte; cuando haya corrido la mitad de esa cuarta parte, le quedará la octava todavía", y así, *ad infinitum*.

tortuga”). Un tipo especialmente interesante de paradojas son las antinomias, afirmaciones verdaderas y falsas al mismo tiempo, entre las que destaca la de Epiménides de Creta, que afirmó que todos los cretenses siempre mentían. O la siguiente recomendación importantísima: “Nunca aceptes un consejo mío”.

Hasta mediados del siglo diecinueve, las paradojas no habían escapado de la filosofía o la literatura. Por eso es comprensible que con su aparición en las matemáticas se iniciase una crisis de fundamentos, sólo comparable a la que había ocasionado, dos mil quinientos años antes, el descubrimiento de los segmentos inconmensurables por la escuela pitagórica. Tres contradicciones, halladas por Cesare Burali-Forti, Bertrand Russell y G. C. Berry, ponían en entredicho la teoría de conjuntos de Cantor, en la que muchos confiaban ya como en la lengua universal definitiva, a la que podrían reducirse todas las ramas de las matemáticas. La paradoja de Berry, que era precisamente bibliotecario de la Bodleian Library de Oxford, cuestiona qué significa realmente definir un concepto; y, a pesar de su aparente sencillez, de ella se pueden deducir resultados centrales de la lógica matemática, como los teoremas de incompletitud de Gödel[4]. Aun así, ninguna de estas paradojas tendría consecuencias tan devastadoras como la de Russell, que surgió de improvisto en la primavera de 1901.

Mientras el filósofo inglés revisaba los resultados de varios meses de investigación sobre la lógica de Peano, le asaltó la siguiente duda:

> “Cantor tenía una prueba de que no existe el número más grande, y a mí me parecía que el número de todas las cosas del mundo debería ser el más grande posible. En consecuencia, examiné su prueba con detalle y me propuse aplicarlo a la categoría de todas las cosas que existen. Esto me llevó a considerar aquellas categorías que no son miembros de sí mismas, y a preguntarme si la categoría de tales categorías es o no miembro de sí misma. Encontré que cualquier respuesta implica la contraria” (Bertrand Russell, *Autobiografía*).

El conjunto al que se refiere Russell está formado por las clases que no son clases de sí mismas. Así, la clase de todos los matemáticos no es miembro de sí misma porque no es un matemático, pero si imaginamos el conjunto de todas las cosas pensables, sí se pertenece, pues lo estamos pensando en el mismo momento de escribirlo.

Si llamamos X a la clase de todos los conjuntos que no son miembros de sí mismos, la pregunta surge de forma natural: ¿está X en X? Supongamos por un momento que la respuesta es sí: entonces X no está en X, tal y como afirma la propiedad que define la clase. Debemos entender entonces que X no pertenece a X, pero, en ese caso, X debería pertenecerse, pues X contiene a todas las clases que no son miembros de sí mismas. Cualquier opción implica la

---

4. Supongamos que nuestra memoria es limitada, y que sólo podemos definir los números naturales usando como máximo quince palabras. Como el número de expresiones posibles es finito, sólo seremos capaces de definir una cantidad finita de números. Entre todos los que no somos capaces de definir, elijamos el más pequeño, y llamémosle *n*. Pero entonces “*n* es el mínimo número que no se puede definir con menos de quince palabras”. Para la demostración de los teoremas de incompletitud de Gödel a partir de esta paradoja, se puede consultar la siguiente referencia: George Boolos, “Una demostración del teorema de incompletitud de Gödel”, La Gaceta de la RSME, 4 (3), 2001, págs. 521-527.

contraria, y esto viola el axioma del tercio excluso, que los griegos formularon basándose en la idea parmenídea de que “entre el ser y el no ser no hay nada”. Para popularizar su paradoja, Russell imaginó un pueblo donde el barbero sólo afeita a quienes no se afeitan a sí mismos, y se preguntó después quién afeita al barbero. Pero la versión que prefería Borges es, sin duda, la que sustituye los conjuntos y los barberos, por otra clase de objetos autorreferenciales, que él conocía mucho mejor: los catálogos y las bibliografías.

Imaginemos una biblioteca tan vasta como la de Babel, en la que cada hombre apenas puede catalogar los libros de su hexágono. Con el tiempo, se hace preciso confeccionar un catálogo que aglutine todas estas listas parciales. Se reúnen los ceñudos ujieres y, tras una acalorada discusión, en la que afloran viejos odios, uno de ellos propone crear el catálogo de todos los catálogos que no se citan a sí mismos. Todo el personal se pone manos a la obra; trabajan durante años día y noche, hasta perecer de agotamiento y de todo tipo de *bibliopatías*. Al fin, una mañana, mientras amanece, ya sólo queda el último diamante, el final del camino, que no es otro que el volumen que llevan tanto tiempo elaborando. Se han terminado todos los anaqueles, y entonces surge la pregunta: ¿tendrán que incluirlo? Como la Biblioteca es condescendiente, quien propuso el método ya había muerto para entonces.

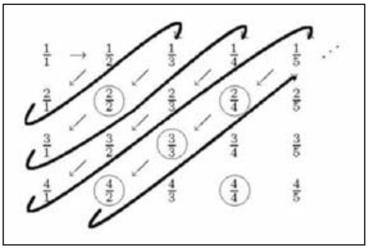
Los números normales

En una nota a pie de página al final de “La Biblioteca de Babel”, Borges sugiere una construcción que simplificaría el entramado de hexágonos y anaqueles de su universo, pues “en rigor, bastaría un *solo volumen*, de formato común, impreso en cuerpo nueve o diez, que constara de un número infinito de hojas infinitamente delgadas”, aunque él mismo advierte que “el manejo de ese *vademécum* sedoso no sería cómodo: cada hoja aparente se desdoblaría en otras análogas; la inconcebible hoja central no tendría revés”. Esta idea, que luego desarrollará en “El Libro de Arena”[5], está basada en un argumento clásico del análisis matemático, que permite colocar en fila los números racionales. Georg Cantor (1845-1918) fue el primero en darse cuenta de que no todos los infinitos son equivalentes, y generalizó el concepto de número al que estamos acostumbrados. Del mismo modo que puede interpretarse el cero como el número de elementos del conjunto vacío, o el uno, como cardinal del conjunto que posee un único miembro, es posible asignar cardinales infinitos a conjuntos infinitos de distinto tamaño.

Existe entonces un infinito mínimo, más pequeño que todos los demás, que es el de los números naturales. Cuando un conjunto se puede poner en biyección con los naturales, lo que en la práctica supone ordenar sus términos en fila, se dice que es *numerable*. Uno de los grandes logros de Cantor consistió en demostrar que las fracciones eran numerables, pero no así el conjunto de los números reales. Con este fin, el matemático alemán ideó un método, lla-

5. “Me dijo que su libro se llamaba *El libro de arena*, porque ni el libro ni la arena tienen ni principio ni fin. Me pidió que buscara la primera hoja. Apoyé la mano izquierda sobre la portada y abrí con el dedo pulgar casi pegado al índice. Todo fue inútil: siempre se interponían varias hojas entre la portada y la mano. Era como si brotaran del libro” (vol. 2, pág. 69).

mado desde entonces 'proceso diagonal de Cantor', del que también quiso servirse Borges. Para probar que el conjunto de los racionales es numerable, se disponen en la primera fila de una tabla las fracciones de numerador uno, en la segunda, las de numerador dos, y así sucesivamente. Luego se recorren en diagonal como indica la figura, teniendo cuidado para no repetir ningún número. Esta misma demostración es válida para la Biblioteca, pues podemos colocar en la primera fila los 25 libros formados por un solo carácter, en la segunda los 625 libros de dos símbolos, y en la fila n-ésima, los 25^n volúmenes que tienen exactamente n símbolos, y luego viajar por ellos de la misma forma.



El resultado no sería otro que ese libro de arena de "infinitas hojas infinitamente delgadas" que imaginó Borges. Pero, ¿para qué almacenarlo todo en una *summa* ingobernable si la Biblioteca entera cabe en un número? Uno de los resultados más profundos de la teoría de números afirma que si elegimos un número al azar entre cero y uno, es casi seguro que en su desarrollo decimal aparezcan todos los dígitos con la misma proporción. Esta clase de números se llaman normales, y algunos ejemplos notables son 0,012345678901234567890123456789..., que resulta de concatenar indefinidamente los números del cero al nueve; el número de Chanpernowne 0,1234567891011121314151617181920..., que se obtiene poniendo uno detrás de otro todos los números naturales, o la constante de Copeland-Edös 0,23571113171923..., compuesta de números primos según la misma estrategia. El argumento que permite demostrar que la frecuencia de cada cifra es la misma con probabilidad uno se extiende a sucesiones de dígitos de longitud arbitraria, es decir, si fijamos un patrón numérico cualquiera, en la expresión decimal de casi todos los números del intervalo (0,1) llegará un punto en el que nuestra combinación aparezca[6].

Cuando Julio César quería decir algo confidencial, nos cuenta Suetonio en sus *Vidas de los doce césares*, "lo escribía cambiando el orden de las letras del alfabeto, para que ninguna palabra pudiera entenderse. Si alguien quiere descodificarlo y entender su significado, debe sustituir la cuarta letra del alfabeto, es decir, la D, por la A, y así con todas". También nosotros podríamos diseñar un método de cifrado de textos sustituyendo las letras por la posición que ocupan en el abecedario, es decir, haciendo corresponder a la a, el 0; a la b, el 1; a la c, el 2; a la z, el 27; al espacio en blanco, el 28; a la coma, el 29; y al punto, el número 30. O incluso escribiendo cada uno de estos números en sistema binario, que es el que usan los ordenadores. Con esta última técnica, la aldea de la Mancha con la que comienza *El Quijote* sería difícilmente reconocible, pero contendría exactamente la misma información que el texto original si escribimos cada número del cero al treinta como un bloque de seis cifras:
00010000011100111000101100111000111000010110101100001100000000010011...

---

6. En sentido estricto, estos números son normales en base diez. Los resultados del *teorema ergódico* se extienden a cualquier base de numeración, y se suele llamar absolutamente normales a los números que son normales en todas las bases. Para una exposición introductoria sobre los números normales, se puede consultar Antonio Córdoba, *La saga de los números*, Barcelona: Crítica, 2006, págs. 182-185.

Todos los libros de la Biblioteca podrían codificarse de esta forma como una sucesión enorme, pero finita, de ceros y unos. Como los números normales contienen en su desarrollo cualquier patrón posible, si examinamos un número normal, llegará un punto en el que cualquier volumen aparezca representado: habrá un momento en el que don Quijote se enfrente al caballero de la Blanca Luna, y antes o después la cólera de Aquiles terminará con muchos decimales.

Surge, sin embargo, un último problema. Aunque casi todos los números son normales, apenas podemos nombrar unos pocos, y no hay ningún criterio que permita decidir si un número dado es normal o no. ¿Es π un número normal? Si lo fuera, como sugiere la poeta polaca Wisława Szymborska en un bellísimo poema del *Gran número*, la Biblioteca de Babel cabría entera en cualquier círculo:

"En la cual ruiseñor que vas a Francia
y se ruega mantener la calma
y también pasarán la tierra y el cielo,
pero no el número Pi, eso ni hablar,
seguirá sin cesar con un cinco en bastante buen estado,
y un ocho, pero nunca uno cualquiera,
y un siete que nunca será el último,
y metiéndole prisa, eso sí, metiéndole prisa a la perezosa eternidad/
para que continúe".

Tal vez fue esto lo que Borges comprendió al asomarse al universo.

Referencias

JORGE LUIS BORGES, *Obras completas*. Barcelona: RBA-Instituto Cervantes, 2005, 2 vols.

GEORGE BOOLOS, «Una demostración del teorema de incompletitud de Gödel». *La Gaceta de la RSME*, 4 (3), 2001, págs. 521-527.

ANTONIO CÓRDOBA, *La saga de los números*. Barcelona: Crítica, 2006.

JAVIER FRESÁN, *Gödel. La lógica de los escépticos*. Madrid: Nivola, 2007.

JAVIER FRESÁN, «La música del pensamiento». *Clarín*, 65 (2006), págs. 77-78.

JOSÉ LUIS GARCÍA MARTÍN. «Sobre la imposibilidad de la Biblioteca de Babel». *Cuadernos hispanoamericanos*, 203 (1973), págs. 507-514.

EDWARD KASNER y JAMES NEWMAN, *Matemáticas e imaginación*. Buenos Aires: Hyspamérica, Biblioteca Personal Jorge Luis Borges, 1985.

GUILLERMO MARTÍNEZ, *Borges y la matemática*. Barcelona: Destino, 2007.

JUAN NUÑO, *La filosofía en Borges*. Barcelona: Reverso, 2005.

SUETONIO, *Vidas de los doce césares*, ed. de Rosa Mª Aguado, Madrid: Gredos, 1992, 2 vols.

WISŁAWA SZYMBORSKA, *El gran número, Fin y principio y otros poemas*. Madrid: Hiperión, 2007.